Τρία θεωρήματα που ξεχωρίζουν

Διάλεξη στο 3ο Λύκειο Τρικάλων
9-4-2012
Σιλουανός Μπραζιτίκος

1. Το θεώρημα του Marden

1α΄. Εισαγωγή-Προεργασία

Το θεώρημα του *Marden* δίνει ένα έντονης γεωμετρικής υφής αποτέλεσμα που αφορά τη σχέση των ριζών ενός πολυωνύμου με τις ρίζες της παραγώγου του. Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.1. *Έστω $p(z)$ ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, του οποίου οι ρίζες z_1, z_2, z_3 δεν είναι συνευθειακά σημεία. Συμβολίζουμε με T το τρίγωνο που ορίζουν οι τρεις αυτές ρίζες. Τότε υπάρχει μοναδική έλλειψη η οποία είναι εγγεγραμμένη στο T και εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του. Επιπλέον οι εστίες αυτής της έλλειψης είναι οι ρίζες του $p'(z)$.*

Στο βιβλίο του ο *Marden* αναφέρει ότι διάφορες μορφές του παραπάνω θεωρήματος εμφανίζονται σε διάφορα άρθρα από το 1864 μέχρι το 1928, με σημαντικότερη ενασχόληση αυτή του *Maxime Bocher* το 1892. Το θεώρημα αυτό ήρθε και πάλι στο φως το 2008, όπου ο *Dan Kalman* στο άρθρο του, αφού πρώτα σημειώσει τα κενά των αποδείξεων των *Marden*, *Bocher*, δίνει μια πολύ στοιχειώδη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος (βασιζόμενος βέβαια στην εργασία των δύο προαναφερθέντων). Στο παρόν θα παρουσιάσουμε μια παραλλαγή της απόδειξης του *Kalman*. Όμως πριν την απόδειξη του θεωρήματος, θα παρουσιάσουμε όλα τα βασικά εργαλεία-λήμματα που θα χρειαστούμε για την απόδειξη.

Αρχίζουμε με κάποιες γενικές παρατηρήσεις. Καταρχάς, στην εκφυλισμένη περίπτωση, η μοναδική έλλειψη που περιγράφεται παραπάνω από το θεώρημα, γίνεται κύκλος. Τότε οι εστίες ταυτίζονται και το $p'(z)$ έχει μια διπλή ρίζα. Αυτή η ειδική περίπτωση συμβαίνει μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι το $p'(z)$ έχει μια διπλή ρίζα, τότε ολοκληρώνοντας τη σχέση βγάζουμε τη μορφή του $p(z)$ και βλέπουμε εύκολα ότι οι ρίζες του είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου το οποίο έχει το κέντρο του στη διπλή ρίζα του $p'(z)$. Κατά δεύτερον, η εγγεγραμμένη έλλειψη που αναφέρεται στο θεώρημα αξίζει περισσότερης ανάλυσης. Στην πραγματικότητα αυτή η έλλειψη είναι η μέγιστη έλλειψη με την ακόλουθη έννοια. Από όλες τις ελλείψεις του περιέχονται στο τρίγωνο, είναι αυτή με το μέγιστο εμβαδό. Το παραπάνω αποτέλεσμα οφείλεται στον *Jacob Steiner* και σε άρθρο του παρουσιάζονται και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Όσο αφορά τα προαπαιτούμενα τώρα, θα χρησιμοποιούμε:

1. Την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή, κάθε μιγαδικός z γράφεται στη μορφή

$$z = re^{i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

2. Τους τύπους του *Vieta* για δευτεροβάθμια πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές. Δηλαδή αν το $q(z) = z^2 + bz + c$ έχει ρίζες z_1, z_2, τότε $b = -(z_1 + z_2)$ και $c = z_1 z_2$.

3. Το αναλλοίωτο του θεωρήματος κάτω από γραμμικούς μετασχηματισμούς. Πράγματι, είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι δίχως βλάβη της γενικότητας

μπορούμε να μεταφέρουμε, να στρέψουμε και να μεγενθύνουμε-σμικρύνουμε το τρίγωνό μας όσο θέλουμε, δηλαδή η ιδιότητα που διατυπώνεται στο θεώρημα του $Marden$ είναι αναλλοίωτη ως προς αυτούς τους μετασχηματισμούς. Πράγματι, έστω M ένας τέτοιος μετασχηματισμός (μεταφορά, στροφή ή ομοιοθεσία) και μια τριάδα $\{z_1, z_2, z_3\}$ για την οποία αληθεύει το Θεώρημα του $Marden$. Θα δείξουμε ότι αληθεύει και για την $\{M(z_1), M(z_2), M(z_3)\}$. Δίχως βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι αναφερόμαστε σε πολυώνυμα με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το 1, συγκεκριμένα στα $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ και $q(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3))$. Είναι εμφανές ότι η εικόνα του τριγώνου μέσω του M είναι ένα όμοιο τρίγωνο και η εικόνα της εγγεγραμμένης έλλειψης είναι μια άλλη έλλειψη, εγγεγραμμένη στο νέο τρίγωνο. Έτσι, το μόνο που μένει να δειχθεί είναι ότι οι ρίζες του $p'(z)$ απεικονίζονται μέσω του M στις ρίζες του $q'(z)$. Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων, θα ισχύει ότι $M(z) - M(z_i) = a(z - z_i)$, επομένως θα έχουμε ότι:

$$q(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3)) = a^3 p(z).$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$aq'(M(z)) = a^3 p'(z),$$

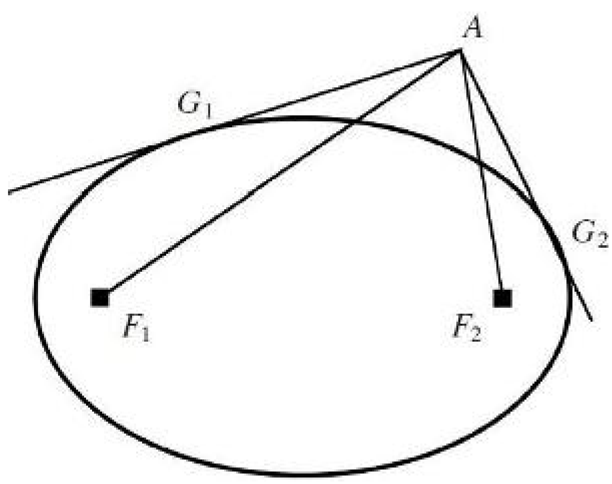
δηλαδή

$$q'(M(z)) = a^2 p(z).$$

Έτσι οι ρίζες του $q'(z)$ είναι οι εικόνες μέσω του M των ριζών του $p'(z)$.

4. Το ακόλουθο λήμμα που αφορά μια καθαρά γεωμετρική ιδιότητα της έλλειψης.

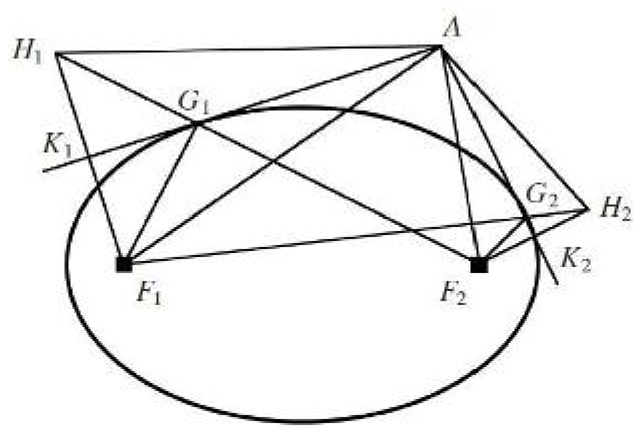
Λήμμα 1.2. *(Γενικευμένη ανακλαστική ιδιότητα) Έστω έλλειψη με εστίες F_1, F_2 και A ένα σημείο εκτός της έλλειψης. Από το A άγονται δύο εφαπτόμενες ℓ, m προς την έλλειψη, εφάπτονται αυτής στα σημεία G_1, G_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει $\widehat{F_1AG_1} = \widehat{F_2AG_2}$.*



Απόδειξη. Θεωρούμε H_1, H_2 τα συμμετρικά των F_1, F_2 ως προς τις AG_1, AG_2 αντίστοιχα, K_1 το σημείο τομής των AG_1, F_1H_1. Τότε, από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης είναι $\widehat{K_1G_1H_1} = \widehat{K_1G_1F_1} = \widehat{F_2G_1A}$. Συνεπώς τα σημεία H_1, G_1, F_2 είναι συνευθειακά. Όμοια τα σημεία F_1, G_2, H_2 είναι και αυτά συνευθειακά. Επιπλέον τα τρίγωνα H_1AF_1 και F_2AH_2 είναι ισοσκελή. Επίσης από τον ορισμό της έλλειψης

$$H_1F_2 = H_1G_1+G_1F_2 = F_1G_1+G_1F_2 = F_1G_2+F_2G_2 = F_1G_2+G_2H_2 = F_1H_2$$

επομένως τα τρίγωνα AH_1F_2 και AF_1H_2 είναι ίσα, οπότε θα ισχύει $\widehat{H_1AF_2} = \widehat{F_1AH_2}$. Άρα πράγματι ισχύει και $\widehat{G_1AF_1} = \widehat{G_2AF_2}$.



□

1β′. Απόδειξη του θεωρήματος του Marden

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα. Για διευκόλυνση θα μοιράσουμε την απόδειξη σε δύο ενδιάμεσα λήμματα.

Λήμμα 1.3. *Έστω πολυώνυμο $p(z)$ τρίτου βαθμού με διακεκριμένες ρίζες z_1, z_2, z_3, που δεν είναι συνευθειακά σημεία και έστω T το τρίγωνο που αυτές ορίζουν. Τότε η έλλειψη με εστίες τις ρίζες του $p'(z)$ που διέρχεται από το μέσον μιας πλευράς του T εφάπτεται σε αυτήν.*

Απόδειξη. Από το 3 από τα προαπαιτούμενα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μία πλευρά του τριγώνου βρίσκεται πάνω στον άξονα των x και ότι έχει μήκος ίσο με 2 και ότι η τρίτη ρίζα βρίσκεται στο πάνω ημιεπίπεδο. Επομένως τότε έχουμε ότι $z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = w = a + ib$ με $b > 0$. Θεωρούμε τώρα την έλλειψη η οποία περνά από το μηδέν και θα δείξουμε ότι εφάπτεται στον άξονα των x. Αυτό θα το κάνουμε χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη ανακλαστική ιδιότητα, δηλαδή θα δείξουμε ότι ο άξονας των x έχει ίσες γωνίες με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το $(0, 0)$ με τις εστίες της έλλειψης. Γνωρίζοντας όλα αυτά, έχουμε ότι:

$$p(z) = (z - 1)(z + 1)(z - w) = z^3 - wz^2 - z + w.$$

Με παραγώγιση παίρνουμε

$$p'(z) = 3z^2 - 2wz - 1 = 3(z^2 - \frac{2w}{3}z - \frac{1}{3}).$$

Θεωρούμε ότι οι ρίζες του $p'(z)$ είναι οι $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}, z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$. Από τους τύπους του $Vieta$ έχουμε ότι:

$$z_4 + z_5 = \frac{2w}{3} \ \kappa\alpha\iota\ z_4 z_5 = -\frac{1}{3}.$$

Η πρώτη σχέση δείχνει ότι τουλάχιστον μία από τις z_4, z_5 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο, και από τη δεύτερη βγάζουμε ότι $\theta_4 + \theta_5 = \pi$. Αυτό σημαίνει ότι είτε και οι δύο ρίζες είναι στον άξονα των y, είτε ότι η μία ρίζα σχηματίζει μια οξεία γωνία με τον θετικό ημιάξονα των x και η άλλη σχηματίζει ίση γωνία με τον αρνητικό ημιάξονα των x. Επομένως από τη τη γενικευμένη ανακλαστική ιδιότητα έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.4. *Έστω πολυώνυμο $p(z)$ τρίτου βαθμού με ρίζες z_1, z_2, z_3, που δεν είναι συνευθειακά σημεία και έστω T το τρίγωνο που αυτές ορίζουν. Τότε η έλλειψη με εστίες τις ρίζες του $p'(z)$ που εφάπτεται στο μέσον μιας πλευράς του T εφάπτεται και στις άλλες δυο πλευρές του.*

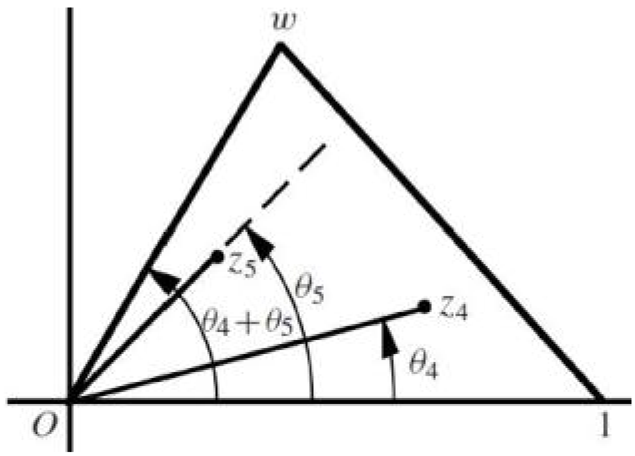
Απόδειξη. Όπως και στο παραπάνω λήμμα μπορούμε τώρα να υποθέσουμε ότι $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = w = a + ib$ για κάποιο $b > 0$ και ότι η έλλειψη εφάπτεται στο μέσον της πλευράς $z_1 z_2$, δηλαδή στο $(\frac{1}{2}, 0)$. Υποθέτοντας το $p(z)$ μονικό (δηλαδή με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1) έχουμε

$$p(z) = z(z-1)(z-w) = z^3 - (1+w)z^2 + wz.$$

Με παραγώγιση παίρνουμε

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1+w)z + w.$$

Από τους τύπους του $Vieta$ έχουμε ότι αν οι ρίζες του $p'(z)$ είναι οι $z_4 = r_4 e^{i\theta_4}, z_5 = r_5 e^{i\theta_5}$ τότε $z_4 + z_5 = \frac{2(w+1)}{3}$. Από αυτό παίρνουμε ότι τουλάχιστον μία εκ των z_4, z_5 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Αλλά τώρα πλέον γνωρίζουμε ότι αυτές οι ρίζες είναι οι εστίες μια έλλειψης που εφάπτεται στον άξονα των x. Επομένως και οι δύο είναι στο άνω ημιεπίπεδο, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε $0 < \theta_4 < \theta_5 < \pi$.
Επιπλέον έχουμε ότι $z_4 z_5 = \frac{w}{3}$. Αυτό δείχνει ότι η $\theta_4 + \theta_5$ ισούται με τη γωνίων του άξονα των x και την Ow. Συνεπώς η γωνία μετά των Oz_5 και Ow ισούται με θ_4 όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Από τη τη γενικευμένη ανακλαστική ιδιότητα έχουμε ότι η έλλειψη εφάπτεται και της Ow. Μένει να δειχθεί ότι η έλλειψη εφάπτεται και στην ευθεία που ορίζουν οι 1 και w. Αυτό μπορεί να δειχθεί ακριβώς όπως το παραπάνω θεωρώντας το τρίγωνο με κορυφές $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = w - 1$ και έπειτα μεταφέροντας το κατά 1 παράλληλα με τον $x-$άξονα.



□

Είμαστε τώρα σε θέση να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του $Marden$. Θεωρούμε T το τρίγωνο που ορίζουν οι ρίζες z_1, z_2, z_3 του πολυωνύμου. Υπάρχει έλλειψη E με εστίες τις ρίζες του $p'(z)$ που διέρχεται από το μέσον μιας πλευράς του T. Τότε, από τα παραπάνω λήμματα, η E εφάπτεται στο μέσον αυτό και συνεπώς εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του T. Μένει να δειχθεί μόνο ότι τα σημεία στα οποία εφάπτεται η E στις άλλες δυο πλευρές είναι τα μέσα τους.
Υποθέτοντας ότι αυτό δεν ισχύει, θεωρούμε μια δεύτερη έλλειψη E' που εφάπτεται στο μέσον μιας άλλης πλευράς του τριγώνου με εστίες τις ρίζες του $p'(z)$. Τότε οι ελλείψεις E, E' έχουν τις ίδιες εστίες και μια κοινή εφαπτομένη συνεπώς ταυτίζονται. Εφαρμόζοντας αυτό και για την τρίτη πλευρά του τριγώνου βλέπουμε ότι η E εφάπτεται στα μέσα και των τριών πλευρών του T. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθεί ένα ανοικτό πρόβλημα σχετικό με τα δύο προβλήματα που μελετήσαμε παραπάνω.

Εικασία του Sendov: Έστω ένα πολυώνυμο $p(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$, του οποίου όλες οι ρίζες z_k βρίσκονται στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Τότε για κάθε $k = 1, 2, ..., n$, ο δίσκος $D(z_k, 1)$ περιέχει τουλάχιστον μια ρίζα του $p'(z)$.

2. Ακέραια κανονικά πολύγωνα

2α′. Εισαγωγή-Προεργασία

Θα ξεκινήσουμε αρχικά με δύο ορισμούς.

Ορισμός 2.1. *Ένα σημείο (x, y) του επιπέδου θα ονομάζεται ακέραιο αν και οι δύο συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί.*

Ορισμός 2.2. *Ένα πολύγωνο στο επίπεδο θα ονομάζεται ακέραιο κανονικό αν έχει όλες τις πλευρές του ίσες, όλες τις γωνίες του ίσες και οι κορυφές του βρίσκονται σε σημεία με ακέραιες συντεταγμένες.*

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.3. *Ένα $n-$γωνο του επιπέδου είναι ακέραιο κανονικό αν και μόνο αν $n = 4$.*

Το θεώρημα αυτό αποδείχθηκε από τον *Hadwiger* το 1964 στο βιβλίο του *Combinatorial Geometry in the plane*. Αργότερα εμφανίστηκε σε διάφορα διάσημα περιοδικά όπως το *Crux* και το *American Mathematical Monthly*. Για την απόδειξη που θα παρουσιάσουμε θα χρειαστούμε τα λεγόμενα πολυώνυμα *Chebychev*. Η κατασκευή αυτών των πολυωνύμων και οι βασικές τους ιδιότητες συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.4. *Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, υπάρχει ένα πολυώνυμο $F_n(x)$ που είναι τέτοιο ώστε:*

$$F_n(2\cos t) = 2\cos nt$$

Επιπλέον, $\deg F_n = n$, το F_n έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και έχει ακεραίους συντελεστές. Το F_n ονομάζεται το $n-$οστο πολυώνυμο Chebychev.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n.

Για $n = 1$, είναι εύκολο να δούμε ότι το $F_1(x) = x$ πληροί τις προϋποθέσεις.

Για $n = 2$, το $F_2(x) = x^2 - 2$ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο.

Για $n > 2$ κάνουμε χρήση της ταυτότητας:

$$2\cos(n-1)t\cos t = \cos nt + \cos(n-2)t \implies$$

$$\begin{aligned} 2\cos nt &= (2\cos(n-1)t)(2\cos t) - 2\cos(n-2)t \\ &= 2\cos t F_{n-1}(2\cos t) - F_{n-2}(2\cos t) \end{aligned}$$

επομένως παίρνουμε την αναδρομική σχέση:

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) - F_{n-2}(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

οπότε $F_n(2\cos t) = 2\cos nt$.

Επιπλέον αφού $\deg F_{n-1} = n-1, \deg F_{n-2} = n-2$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\deg F_n = \deg(xF_{n-1}(x) - F_{n-2}(x)) = n.$$

Τέλος, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου του F_n είναι ίσος με το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου του F_{n-1}, ο οποίος από την επαγωγική υπόθεση ισούται με 1, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

Τα παραπάνω πολυώνυμα βρίσκουν άμεση εφαρμογή στο ακόλουθο θεώρημα που οφείλεται στον $Niven$.

Θεώρημα 2.5. *Αν θ είναι μια γωνία στο διάστημα $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ έτσι ώστε οι αριθμοί $\dfrac{\theta}{\pi}$ και $\cos\theta$ να είναι και οι δύο ρητοί, τότε $\theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $\dfrac{\theta}{\pi}$ είναι ρητός, δηλαδή $\theta = \dfrac{2\pi k}{n}$ όπου $k, n \in \mathbb{Z}$ και $n \geq 1$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\cos\theta \in \mathbb{Q}$ και θέτοντας $c = 2\cos\theta \in \mathbb{Q}$, παίρνουμε:

$$F_n(c) = F_n\left(2\cos\frac{2\pi k}{n}\right) = 2\cos(2\pi k) = 2$$

Επομένως ο c είναι μια ρητή ρίζα του $F_n(x) - 2$, το οποίο έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το 1 και έχει ακεραίους συντελεστές, επομένως ο c πρέπει να είναι ακέραιος. Όμως ισχύει η σχέση $|c| = |2\cos\theta| \leq 2$, άρα $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

Υποθέτοντας ότι $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, παίρνουμε ότι $\theta = 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$, που είναι το ζητούμενο. □

2β'. Απόδειξη του Θεωρήματος

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα 2.3.

Απόδειξη. Έστω $A_1 ... A_n$ ένα $n-$γωνο του επιπέδου είναι ακέραιο κανονικό. Τότε θέτουμε $A_1A_2 = A_2A_3 = x$ και $A_1A_3 = y$ και από τον τύπο απόστασης σημείου από σημείου με συντεταγμένες, εύκολα παίρνουμε $x^2, y^2 \in \mathbb{N}$, οπότε από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ παίρνουμε:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{y^2 - 2s^2}{2s^2} \in \mathbb{Q}$$

Τότε από θεώρημα του $Niven$ έχουμε ότι αν $0 \leq \frac{2\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, δηλαδή αν $n \geq 4$ τότε $\dfrac{2\pi}{n} = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}$, δηλαδή $n = 4$ ή $n = 6$. Οπότε οι μόνες περιπτώσεις που έχουμε είναι $n = 3, 4, 6$. Για $n = 3$ έχουμε την περίπτωση του ισοπλεύρου τριγώνου (έστω ABC) που δεν μπορεί να έχει τις κορυφές του σε σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, διότι για το εμβαδό του ισχύει

$$E = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)\right| \in \mathbb{Q},$$

το οποίο είναι άτοπο.

Για $n = 6$, θα βγάλουμε άτοπο με παρόμοιο τρόπο. Θεωρούμε τρεις διαδοχικές κορυφές A, B, C του εξαγώνου. Τότε για το εμβαδό αυτό του τριγώνου ισχύει:

$$(ABC) = \frac{1}{2}AB^2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)\right| \in \mathbb{Q},$$

το οποίο είναι άτοπο και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

3. Το θεώρημα του Minkowski

3α΄. Εισαγωγή-Προεργασία

Θα ξεκινήσουμε με δύο βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το A είναι κυρτό αν για κάθε $x, y \in A$ και για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει ότι*

$$(1-t)x + ty \in A.$$

Ορισμός 3.2. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το A είναι συμμετρικό, αν περιέχει την αρχή των αξόνων και για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι και $-x \in A$.*

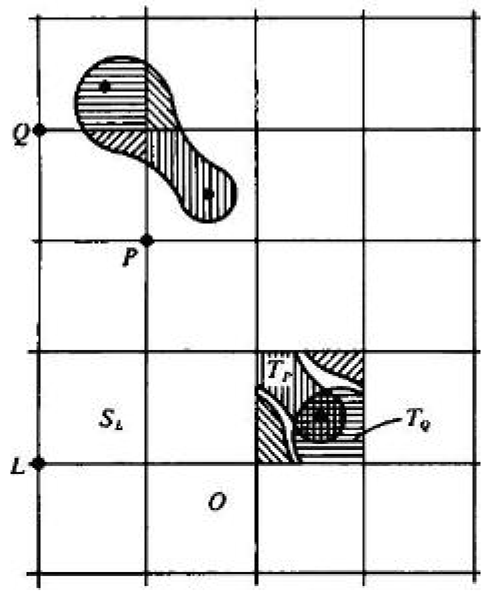
Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα που θα μας αποσχολήσει σε αυτή την ενότητα.

Θεώρημα 3.3. *(Minkowski.)Έστω K κυρτό, φραγμένο και συμμετρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αν το K έχει εμβαδό μεγαλύτερο του 4, τότε περιέχει τουλάχιστον ένα ακέραιο σημείο, διαφορετικό από την αρχή των αξόνων.*

Το παραπάνω θεώρημα αποδείχθηκε στη γενική του μορφή από τον $Minkowski$ το 1889 και βρίσκει πολλές εφαρμογές στο γραμμικό προγραμματισμό και τη θεωρία αριθμών. Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα το οποίο οφείλεται στον $Blichfeldt$.

Λήμμα 3.4. *Έστω M ένα φραγμένο σύνολο στο επίπεδο με εμβαδό μεγαλύτερο του 1. Τότε το M περιέχει δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2), ώστε οι αριθμοί $x_2 - x_1$ και $y_2 - y_1$ να είναι ακέραιοι.*

Απόδειξη. Για κάθε ακέραιο σημείο L, συμβολίζουμε με S_L το μοναδιαίο τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς του άξονες του οποίου η κάτω αριστερά κορυφή είναι το σημείο L. Τότε το σύνολο M διαχωρίζεται από τα S_L σε κομμάτια της μορφής $M \cap S_L$. Μεταφέρουμε όλα τα τετράγωνα S_L στο τετράγωνο S_O, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Επομένως τα κομμάτια $M \cap S_L$ μεταφέρονται σε υποσύνολα T_L του S_O. Αφού το συνολικό εμβαδό όλων αυτών είναι από την υπόθεση μεγαλύτερο του 1, τουλάχιστον δύο κομμάτια από αυτά πρέπει να τέμνονται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το (x, y) ανήκει και στο T_P και στο T_Q, όπου $P \neq Q$. Τότε αν $P = (a, b)$ και $Q = (c, d)$, το σημείο $(x_1, y_1) = (x + a, y + b)$ ανήκει στο κομμάτι $M \cap S_P$, ενώ το σημείο $(x_2, y_2) = (x + c, y + d)$ ανήκει στο κομμάτι $M \cap S_Q$. Τότε όμως προφανώς το M περιέχει τα (x_1, y_1) και (x_2, y_2) και $x_1 - x_2 = a - c \in \mathbb{Z}$ και $y_1 - y_2 = b - d \in \mathbb{Z}$, οπότε έχουμε το ζητούμενο. $\square$



3β′. Απόδειξη του θεωρήματος του Minkowski

Είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε απόδειξη στο θεώρημα του *Minkowski*.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$K' = \left\{ \frac{1}{2}x | x \in K \right\}.$$

Τότε από τους λόγους ομοιότητας έχουμε ότι

$$\epsilon\mu\beta(K') = \frac{1}{4}\epsilon\mu\beta(K) > 1.$$

Επομένως από το λήμμα του *Blichfeldt* έχουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2), ώστε οι αριθμοί $x_2 - x_1$ και $y_2 - y_1$ να είναι ακέραιοι. Από την κατασκευή του K' έχουμε ότι τα σημεία $A = (2x_1, 2y_1)$ και $B = (2x_2, 2y_2)$ είναι στο K, το οποίο αφού είναι συμμετρικό περιέχει και το $C = (-2x_1, -2y_1)$. Αφού το K είναι κυρτό θα περιέχει και το μέσον P του τμήματος CB. Οι συντεταγμένες όμως του P είναι:

$$\left(\frac{-2x_1 + 2x_2}{2}, \frac{-2y_1 + 2y_2}{2} \right) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

επομένως το P είναι ακέραιο σημείο διαφορετικό του O οπότε έχουμε το ζητούμενο. $\square$