# ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

## Σύνολα

- $\mathbb{N}$ : **οι φυσικοί αριθμοί** $0,1,2,3,\ldots$
- $\mathbb{Z}$ : **οι ακέραιοι αριθμοί** $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$
- $\mathbb{Q}$ : **οι ρητοί αριθμοί.** Είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$ όπου $\alpha$ και $\beta$ ακέραιοι και $\beta \neq 0$
- $\mathbb{Q}'$ ή $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ : **οι άρρητοι αριθμοί**. Είναι οι αριθμοί που αν γραφούν ως δεκαδικοί έχουν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων που δεν είναι περιοδικά. (Όλοι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί)
- $\mathbb{R}$ : **οι πραγματικοί αριθμοί**. Είναι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί μαζί.

## Πράξεις - Ιδιότητες

### Πρόσθεση

- $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ Αντιμεταθετική
- $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ Προσεταιριστική
- $\alpha+0=\alpha$ Ουδέτερο στοιχείο
- $\alpha+(-\alpha)=0$ Αντίθετο στοιχείο
- $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$ Ιδιότητα διαγραφής
- Αν $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$ τότε $\alpha+\gamma=\beta+\delta$

### Πολλαπλασιασμός

- $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ Αντιμεταθετική
- $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ Προσεταιριστική
- $\alpha\cdot 1=\alpha$ Ουδέτερο στοιχείο
- $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \alpha\neq 0$ Αντίθετο στοιχείο
- $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma,\ \alpha\neq 0$ Ιδιότητα διαγραφής
- Αν $\alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$ τότε $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta$
- $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ Επιμεριστική ως προς τη πρόσθεση
- $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$ Επιμεριστική ως προς την αφαίρεση

**Διαίρεση:** • $\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta},\ \beta\neq 0$

### Άλλες ιδιότητες

- $\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **ή** $\beta=0$
- $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ **και** $\beta\neq 0$
- $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ **και** $\beta=0$
- $(-1)\cdot\alpha=-\alpha$
- $(-\alpha)\cdot\beta=-\alpha\cdot\beta$
- $(-\alpha)\cdot(-\beta)=\alpha\cdot\beta$
- $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

### Πράξεις Κλασμάτων

- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha\pm\gamma}{\beta},\ \beta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta\pm\gamma\cdot\beta}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma},\ \beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0$

### Ιδιότητες Αναλογιών

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma,\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha},\ \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta},\ \beta\cdot\delta\neq 0$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

## Δυνάμεις

### Ορισμοί

- $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 1$
- $\alpha^{1} = \alpha$
- $\alpha^{0} = 1,\ \alpha \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}},\ \alpha \neq 0$

### Ιδιότητες

- $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$
- $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu},\ \alpha \neq 0$
- $\left(\alpha^{\nu}\right)^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$
- $\left(\alpha \cdot \beta\right)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}},\ \beta \neq 0$
- $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu},\ \alpha \cdot \beta \neq 0$

## Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$
- $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$
- $(\alpha-\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \beta + 2\alpha \cdot \gamma + 2\beta \cdot \gamma$
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \cdot \beta + 3\alpha \cdot \beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2 \cdot \beta + 3\alpha \cdot \beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta) \cdot \left(\alpha^2 - \alpha \cdot \beta + \beta^2\right)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta) \cdot \left(\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2\right)$
- $(x+\alpha) \cdot (x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha \cdot \beta$
- $\alpha^{\nu} - \beta^{\nu} = (\alpha-\beta) \cdot \left(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2} \cdot \beta + \alpha^{\nu-3} \cdot \beta^2 + \cdots + \alpha \cdot \beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 1$

## Ανισότητες

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma < \beta \pm \gamma$
- Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$
- $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$
- $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ αν **α,β,γ,δ θετικοί**
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ αν $\gamma > 0$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ αν $\gamma < 0$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} < \dfrac{\beta}{\gamma}$ αν $\gamma > 0$
- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$ αν $\gamma > 0$
- Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$
- Αν **α,β θετικοί**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$

**ΠΡΟΣΟΧΗ!! Δεν** αφαιρούμε και **δεν** διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

## Απόλυτη τιμή

**Ορισμός:** $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$

### Ιδιότητες

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$
- $|x| \geq x$
- $|x| \geq -x$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, με $\beta \neq 0$
- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = -\theta$ ή $x = \theta$, αν $\theta \geq 0$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = -\alpha$ ή $x = \alpha$
- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$, αν $\theta \geq 0$
- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$, αν $\theta \geq 0$
- Αν $|\alpha| + |\beta| = 0$, τότε $\alpha = 0$ **και** $\beta = 0$
- Αν $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ **ή** $\beta \neq 0$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

## Ρίζες

**Ορισμός:** $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^{\nu} = \alpha$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \geq 0$, $x \geq 0$

- $\left(\sqrt[\nu]{x}\right)^{\nu} = x$, $x \geq 0$
- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}} = |x|$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\alpha \geq 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$
- $\alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\alpha \geq 0$

## Δευτεροβάθμια εξίσωση

- Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού**.
- **Διακρίνουσα:** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

| $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ | Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ |
|---|---|
| αν $\Delta > 0$ | έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ |
| αν $\Delta = 0$ | έχει μία διπλή ρίζα την $x_0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ |
| αν $\Delta < 0$ | δεν έχει πραγματικές ρίζες |

**Τύποι Vieta:** Αν $x_1, x_2$ είναι οι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τότε:

- $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$
- $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

- Η εξίσωση με ρίζες $x_1, x_2$ είναι η εξής: $x^2 - Sx + P = 0$

## Τριώνυμο

**Ορισμός:** **Τριώνυμο** δευτέρου βαθμού λέγεται η παράσταση, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

**Μορφές Τριωνύμου**

| | |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | $f(x) = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, $x_1, x_2$ ρίζες του τριωνύμου |
| $\Delta = 0$ | $f(x) = \alpha \cdot \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ |
| $\Delta < 0$ | $f(x) = \alpha \cdot \left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \dfrac{\lvert\Delta\rvert}{4\alpha^2}\right]$ |

**Πρόσημο τριωνύμου**

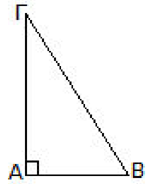
| | |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | **f(x) Ομόσημο του α** αν $x < x_1$ ή $x > x_2$<br>**f(x) Ετερόσημο του α** αν $x_1 < x < x_2$ |
| $\Delta = 0$ | **f(x) Ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **εκτός** της τιμής $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ |
| $\Delta < 0$ | **f(x) Ομόσημο του α** για κάθε $x \in \mathbb{R}$ |

Όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου με $x_1 < x_2$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

# Τριγωνομετρια

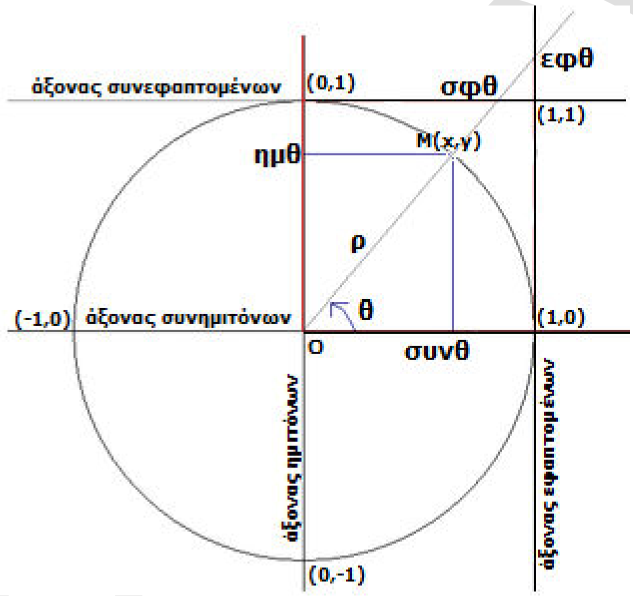
## Τριγωνομετρικοι αριθμοι οξειας γωνιας σε ορθογώνιο τρίγωνο




- $\eta\mu = \dfrac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$
- $\sigma\upsilon\nu = \dfrac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}}$
- $\varepsilon\varphi = \dfrac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Προκείμενη κάθετη πλευρά}}$
- $\sigma\varphi = \dfrac{\text{Προκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}$

## Τριγωνομετρικός κύκλος – Τριγωνομετρικοι αριθμοι σε σύστημα συντεταγμένων

**Ορισμός: Τριγωνομετρικός κύκλος** λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.




- $\rho = (OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\eta\mu\theta = \dfrac{y}{\rho}$
- $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x}{\rho}$
- $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{y}{x}$
- $\sigma\varphi\theta = \dfrac{x}{y}$
- $-1 \le \eta\mu\theta \le 1$
- $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$
- $\varepsilon\varphi\theta \in \mathbb{R}$
- $\sigma\varphi\theta \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{\mu}{180^\circ}$ (μετατροπή από rad (α) σε μοίρες (μ) και αντίστροφα)
- $\eta\mu(360^\circ\kappa + \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu(360^\circ\kappa + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\varepsilon\varphi(360^\circ\kappa + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$
- $\sigma\varphi(360^\circ\kappa + \omega) = \sigma\varphi\omega$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

## Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

| Τεταρτημόριο / Τριγ. αριθμός | 1ο | 2ο | 3ο | 4ο |
|---|---|---|---|---|
| **ημ** | + | + | – | – |
| **συν** | + | – | – | + |
| **εφ** | + | – | + | – |
| **σφ** | + | – | + | – |

## Τριγωνομετρικοι αριθμοι σημαντικών γωνιών

| Μοίρες / rad / Τριγ. Αριθμός | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| **ημ** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 | 0 |
| **συν** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 | 1 |
| **εφ** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Δεν ορίζεται | 0 | Δεν ορίζεται | 0 |
| **σφ** | Δεν ορίζεται | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | Δεν ορίζεται | 0 | Δεν ορίζεται |

## Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

- $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$
- $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, $\sigma\upsilon\nu\theta \ne 0$
- $\sigma\varphi\theta = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$, $\eta\mu\theta \ne 0$
- $\varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\varphi\theta = 1$

**Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις**

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

**Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο**

**• Αντίθετες γωνίες**

$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

**• Συμπληρωματικές γωνίες**

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega$

**• Γωνίες με διαφορά $\frac{\pi}{2}$**

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\varepsilon\varphi\omega$

**• Παραπληρωματικές γωνίες**

$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(\pi - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

**• Γωνίες με διαφορά $\pi$**

$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$

$\sigma\upsilon\nu(\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\varepsilon\varphi(\pi + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$

$\sigma\varphi(\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega$

**• Γωνίες με άθροισμα $\frac{3\pi}{2}$**

$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = -\eta\mu\omega$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \sigma\varphi\omega$

$\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega$

**Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος – διαφοράς δύο τόξων**

$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

**Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου**

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$

$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

## Πρόοδοι

**Αριθμητική πρόοδος**

• **Ορισμός:** Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) λέγεται η ακολουθία αριθμών που κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **προσθέτοντας** τον ίδιο αριθμό ω (διαφορά).

• **Τύποι:** • $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ (αναδρομικός τύπος) • $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ (γενικός τύπος)

• **Άθροισμα των ν πρώτων όρων:** $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

• **Αριθμητικός μέσος:** Οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. αν και μόνο αν $2\beta = \alpha + \gamma$. Ο αριθμός β λέγεται αριθμητικός μέσος των α,γ.

**Γεωμετρική πρόοδος**

• **Ορισμός:** Γεωμετρική πρόοδος (Γ.Π) λέγεται η ακολουθία αριθμών που κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο **πολλαπλασιάζοντας** τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό λ (λόγος).

• **Τύποι:** • $\alpha_{\nu+1} = \lambda \cdot \alpha_\nu$, $\lambda \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ (αναδρομικός τύπος) • $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$ (γενικός τύπος)

• **Άθροισμα των ν πρώτων όρων:** $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \neq 1$

• **Γεωμετρικός μέσος:** Οι μη μηδενικοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Ο θετικός αριθμός β με $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α,γ.

## Εκθετική συνάρτηση

• Εκθετική συνάρτηση με βάση α λέγεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$. Ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Αν **0 < α < 1** η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ **α > 1** η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

• Αν η βάση της συνάρτησης είναι ο αριθμός $e \simeq 2{,}718281...$ τότε η συνάρτηση $f(x) = e^x$ λέγεται εκθετική.

**Ιδιότητες**

Ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων και επιπλέον:

• $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ • Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ • Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

## Λογαριθμική συνάρτηση

• **Ορισμός:** Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$. (α: βάση λογαρίθμου)

• Λογαριθμική συνάρτηση με βάση α λέγεται η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$ με $0 < \alpha \neq 1$. Ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$.

Αν **0 < α < 1** η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ **α > 1** η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

(Σε όλα τα επόμενα θεωρούμε ότι οι μεταβλητές παίρνουν τιμές ώστε να ορίζονται οι λογάριθμοι)

• $\log_\alpha \alpha = 1$ • $\log_\alpha 1 = 0$ • $\log_\alpha \alpha^x = x$ $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

• **Δεκαδικός λογάριθμος:** $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$, $\theta > 0$

• **Νεπέριος ή φυσικός λογάριθμος:** $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, $\theta > 0$

• Με βάση τα παραπάνω είναι: • $\log 10 = 1$ • $\log 1 = 0$ • $\log 10^x = x$ • $10^{\log \theta} = \theta$

• $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$ • $\ln e = 1$ • $\ln 1 = 0$ • $\ln e^x = x$ • $e^{\ln \theta} = \theta$

**Ιδιότητες**

• $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_1$ • $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

• $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$ • $\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$ (αλλαγή βάσης)

**Χρήσιμα:** • $\alpha^x = e^{\ln \alpha^x} = e^{x \cdot \ln \alpha}$ (αλλαγή βάσης σε εκθετική συνάρτηση) • $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ • $\ln x = \dfrac{\log 10}{\log e}$

• $e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln \alpha$, $\alpha > 0$ • $\ln x = \alpha \Leftrightarrow x = e^\alpha$ • $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

• Αν $\alpha > 1$, τότε $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ • Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

## Αναλυτική Γεωμετρία

• **Συντεταγμένες**: Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε:

• $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ (μέσο του AB) • $(AB) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (μήκος του AB)

### Ευθεία

• **Συντελεστής διεύθυνσης** ή **κλίση** ευθείας λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον θετικό ημιάξονα Ox.

• Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της ευθείας, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ με

$x_1 \neq x_2$. Αν $x_1 = x_2$, ο συντελεστής διεύθυνσης **δεν** ορίζεται.

### Εξίσωση ευθείας

• Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης και $A(x_0, y_0)$ σημείο της ευθείας, τότε έχει εξίσωση: $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$

• Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε έχει εξίσωση: $y = \lambda \cdot x$

• Αν διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι **κάθετη στον άξονα x΄x** έχει εξίσωση $x = x_0$

• Αν διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι **κάθετη στον άξονα y΄y** έχει εξίσωση $y = y_0$

• Η **διχοτόμος της 1ης - 3ης** γωνίας έχει εξίσωση $y = x$

• Η **διχοτόμος της 2ης - 4ης** γωνίας έχει εξίσωση $y = -x$

• **Συνθήκη παραλληλίας – καθετότητας:** Αν $(\varepsilon_1): y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda_2 x + \beta_2$ οι εξισώσεις δύο ευθειών τότε: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

• Η $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$, $B \neq 0$

• Η **απόσταση** του σημείου $A(x_0, y_0)$ από την ευθεία (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι $d(A, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

• Το **εμβαδό** τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$

### Κύκλος

**Ορισμός:** Κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ.

• Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$

• Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

• Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα

$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

• Η **εφαπτομένη** του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η (ε): $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$

3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων

**Σχετικές θέσεις δύο κύκλων**

Αν $(O,R)$ και $(K,\rho)$ με $R>\rho$ δύο κύκλοι και $(OK)=\delta$ (διάκεντρος) τότε:

- Αν $\delta > R+\rho$ ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)
- Αν $\delta < R-\rho$ ο $(K,\rho)$ είναι εσωτερικός του $(O,R)$ (δεν έχουν κανένα κοινό σημείο)
- Αν $\delta = R+\rho$ οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ένα κοινό σημείο επαφής)
- Αν $\delta = R-\rho$ οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά (ένα κοινό σημείο επαφής)
- Αν $R-\rho<\delta<R+\rho$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

**Π α ρ α β ο λ ή**

**Ορισμός:** Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μία σταθερή ευθεία δ (διευθετούσα) και από ένα σταθερό σημείο Ε (εστία).

- Η εξίσωση της παραβολής με $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και δ: $x=-\frac{p}{2}$ είναι $y^2=2px$ (p: παράμετρος) και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $yy_1=p(x+x_1)$
- Η εξίσωση της παραβολής με $E\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και δ: $y=-\frac{p}{2}$ είναι $x^2=2py$ (p: παράμετρος) και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $xx_1=p(y+y_1)$

**Έ λ λ ε ι ψ η**

**Ορισμός:** Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου Μ που το άθροισμα των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία Ε, Ε' (εστίες) είναι σταθερό και ίσο με 2α.

- Η εξίσωση της έλλειψης με $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$
- Η εξίσωση της έλλειψης με $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ είναι $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ και η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\beta^2}+\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$

**Υ π ε ρ β ο λ ή**

**Ορισμός:** Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου Μ που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία Ε, Ε' (εστίες) είναι σταθερή και ίση με 2α.

- Η εξίσωση της υπερβολής με $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$ είναι $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{xx_1}{\beta^2}-\frac{yy_1}{\alpha^2}=1$
- Η εξίσωση της υπερβολής με $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ είναι $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$, $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ είναι η $\frac{yy_1}{\beta^2}-\frac{xx_1}{\alpha^2}=1$
- **Ισοσκελής** λέγεται η υπερβολή με εξίσωση $x^2-y^2=\alpha^2$ ή $y^2-x^2=\alpha^2$

3ο Γ.Ε.Λ.Τρικάλων

## Επιπεδα σχήματα

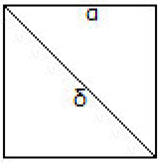
### Τετράγωνο

α: πλευρά

Εμβαδόν=$α^2$

Περίμετρος=4α

Διαγώνιος: $δ = α\sqrt{2}$



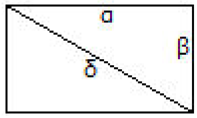

### Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

α,β: πλευρές

Εμβαδόν =α·β

Περίμετρος=2α+2β

Διαγώνιος: $δ = \sqrt{α^2 + β^2}$



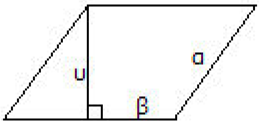

### Παραλληλόγραμμο

α,β: πλευρές

υ: ύψος

Εμβαδόν = β·υ

Περίμετρος=2α+2β




### Τραπέζιο

Β: μεγάλη βάση

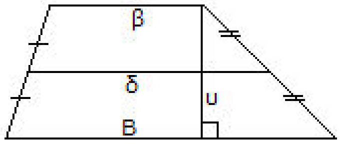
β: μικρή βάση

δ: διάμεσος

υ: ύψος

Εμβαδόν=$\frac{(Β + β) \cdot υ}{2}$

$δ = \frac{Β + β}{2}$



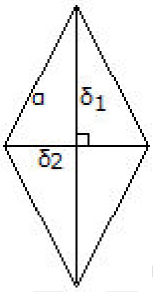

### Ρόμβος

α: πλευρά

$δ_1$, $δ_2$ : διαγώνιοι

Εμβαδόν=$\frac{δ_1 \cdot δ_2}{2}$

Περίμετρος=4α



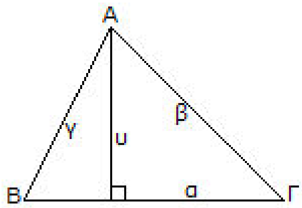

### Τρίγωνο

α, β, γ: πλευρές

υ: ύψος στη πλευρά α

Περίμετρος: 2τ=α+β+γ

Εμβαδόν=$\frac{1}{2}β \cdot υ$



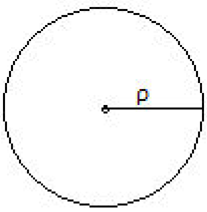

### Κύκλος

ρ: ακτίνα

π≅3,14

Εμβαδόν= $π \cdot ρ^2$

Μήκος κύκλου: L=2π·ρ




3ο Γ.Ε.Λ. Τρικάλων